

$\mathcal{I}(\sqrt{(x-a)(b-x)})$ La sostituzione $\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} = t$, $x = \frac{bt^2+a}{1+t^2}$, $dx = \frac{2(b-a)t}{(1+t^2)^2}$
 $\sqrt{(x-a)(b-x)} = \frac{|b-a|t}{1+t^2}$ e l'integrale diventa $2(b-a)|b-a| \int \frac{t^2}{(1+t^2)^3} dt$. L'integrale è dato
da $-\frac{t}{4(1+t^2)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$. Ora $\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2} + 2 \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{1+t^2} + 2 \int \frac{dt}{1+t^2} - 2 \int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ e
quindi $\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} + \frac{1}{2} \frac{t}{1+t^2}$. Alla fine abbiamo ottenuto $\int \frac{t^2}{(1+t^2)^3} dt = -\frac{t}{4(1+t^2)^2} +$
 $\frac{1}{8} \arctan t + \frac{1}{8} \frac{t}{1+t^2}$. Sostituendo le varie grandezze si ottiene $\frac{1}{4}(b-a)|b-a| \arctan \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} +$
 $\frac{1}{4} \frac{|b-a|}{b-a} \sqrt{(x-a)(b-x)}(2x-b-a) + C$ che è anche uguale a $\frac{1}{8}(b-a)|b-a| \arcsin \frac{2x-b-a}{b-a} +$
 $\frac{1}{4} \sqrt{(x-a)(b-x)}(2x-b-a) + C$.

Si è usato il fatto che $\frac{1}{2} \arcsin x + \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\pi}{4}$ (la si dimostri)

Un altro tipo di soluzione è la seguente. Si effettua la sostituzione $u = x - \frac{a+b}{2}$ da cui
 $\int \sqrt{\frac{1}{4}(a-b)^2 - u^2} du$ e poi $u = \frac{1}{2}(a-b) \cos t$. So ottiene $-\int \frac{1}{4}(a-b)|a-b| \sin t |\sin t| dt$. Sup-
poniamo che $\sin t > 0$ e quindi $-\int \frac{1}{4}(a-b)|a-b| \sin t |\sin t| dt = \frac{1}{8}(b-a)|a-b|(t - \sin t \cos t)$. Da
 $u = \frac{1}{2}(a-b) \cos t$ otteniamo $t = \arccos \frac{2u}{b-a}$ e quindi $\frac{1}{8}(b-a)|a-b|(\arccos \frac{2u}{b-a} - \frac{2u}{a-b} \sqrt{1 - \frac{4u^2}{(a-b)^2}})$.
Nella variabile x si ottiene $\frac{1}{8}(b-a)|a-b|(\arccos \frac{2x-a-b}{b-a} - \frac{2x-a-b}{a-b} \sqrt{1 - \frac{4u^2}{(a-b)^2}}) = \frac{1}{8}(b-a)|a-b|$
 $b|(\arccos \frac{2x-a-b}{b-a} - \frac{2x-a-b}{a-b} \frac{4}{|a-b|} \sqrt{(x-a)(b-x)}) = \frac{1}{8}(b-a)|a-b| \arcsin \frac{2x-a-b}{b-a} + \frac{1}{4}(2x-b-a)$
 $a) \sqrt{(x-a)(b-x)}$ Si è usato il fatto che $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ (la si dimostri).

Supporre che $\sin t > 0$ non è restrittivo in quanto l'inversione della relazione $u = \frac{1}{2}(a-b) \cos t$
prevede che $0 \leq t \leq \pi$ e quindi il seno è positivo.

Un ulteriore modo di procedere consiste nel sostituire $-x^2 + x(a+b) - ab = u$ da cui $x =$
 $\frac{a+b \pm \sqrt{(a-b)^2 - 4u}}{2}$. L'integrale diventa $-\int \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{(a-b)^2 - 4u}} du$ e con la sostituzione $u = \frac{(a-b)^2 \cos^2 t}{2}$
diventa $\frac{1}{8} \int (a-b)^2 \frac{\cos t |\cos t| \sin t}{|\sin t|} dt$. Supponendo $\sin t > 0$ otteniamo $\frac{1}{8}(a-b)^2 \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t)$ e
procedendo si arriva allo stesso risultato.